УДК 621.396.6.536.248.2.001

ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛЕНКИ ПО СТЕНКЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАНАЛА

© 2009 Н.И. Клюев, Е.А. Соловьева[1]

В работе представлена математическая модель волновой пленки, стекающей по стенке вертикального цилиндрического канала под действием силы тяжести. Исследование проводилось в условиях длинноволнового приближения.

Ключевые слова: кольцевой режим, волновая пленка, вертикальный цилиндрический канал, длинноволновое приближение.

Введение

Течение пленки по стенке вертикального цилиндрического канала является довольно распространенным явлением. Например, в теплообменных пленочных аппаратах жидкая пленка взаимодействует с газовым ядром потока. Наблюдения показывают, что уже при сравнительно небольших числах Рейнольдса ($Re \gtrsim 6$) на поверхности пленки возникают волны [1, 2]. Волны оказывают значительное влияние на взаимодействие между ядром потока и пленкой. К силе трения добавляется сопротивление формы, которое увеличивает общее сопротивление.

Исследованию гидродинамики волновой пленки посвящено большое число работ ([1—9] и др.), однако эти разработки ограничивались рассмотрением плоской задачи. В данной работе предложена математическая модель волновой пленки, стекающей по стенке вертикального цилиндрического канала.

1. Уравнение волновой пленки

Рассмотрим установившееся движение жидкой пленки, свободно стекающей по стенке вертикального цилиндрического канала за счет силы

[1]Клюев Николай Ильич (mmm-mechmat@ssu.samara.ru), Соловьева Евгения Александровна (e.solovieva-ssu@mail.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

тяжести. Будем рассматривать пленки с длиной волны λ, во много раз превышающей ее толщину: $\lambda \gg \delta$. На рис. 1.1 представлена схема течения пленки, где ось z направлена вниз по движению жидкости.

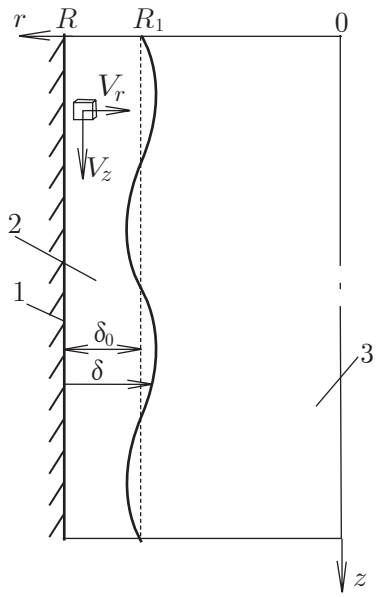

Рис. 1.1. Волновая пленка: *1* — стенка, *2* — жидкая пленка, *3* — газовое ядро; δ, δ_0 — текущая и средняя толщина пленки, V_z, V_r — продольная и радиальная составляющие скорости

Запишем уравнения движения и неразрывности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} = g - \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu_2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \nu_2\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu_2\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{V_r}{r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}\right), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} = 0, \quad (1.3)$$

где g — ускорение свободного падения, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, p — давление, t — время. Здесь и далее индексом "1" будем обозначать характеристики газового ядра, "2" — характеристики пленки.

В связи с малостью поперечных размеров области течения по сравнению с продольными размерами потока можно воспользоваться теорией пограничного слоя [10, 12]. В рамках этой теории поперечные скорости малы по сравнению с продольными, и в уравнении (1.2) все слагаемые, содержащие V_r, малы при сопоставлении с градиентом давления. Таким образом, проекция уравнения движения на радиальную координату преобразуется

к виду

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Давление в канале с учетом кривизны волновой поверхности выражается по формуле

$$p = p_0 + \rho_1 g z + \Delta p_c.$$

Здесь p_0 — статическое давление; капиллярное давление p_c в случае течения жидкости по внутренней стороне цилиндрического канала будет выражаться как сумма [4]

$$p_c = -\sigma \left(\frac{1}{R_{cr}} + \frac{1}{R-\delta} \right), \tag{1.4}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, радиус кривизны волновой поверхности R_{cr} из [13]

$$\frac{1}{R_{cr}} = \frac{\ddot{\delta}}{(1+\dot{\delta}^2)^{3/2}} \simeq \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}, \qquad \dot{\delta} = \frac{\partial \delta}{\partial z}.$$

Последнее равенство получено с учетом длинноволнового представления картины течения, т.е. $1 \gg \dot{\delta}^2$. Таким образом, градиент давления

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_1 g - \sigma \left(\frac{\partial^3 \delta}{\partial z^3} + \frac{1}{(R-\delta)^2} \frac{\partial \delta}{\partial z} \right). \tag{1.5}$$

Запишем поперечную компоненту скорости на поверхности пленки, используя определение скорости:

$$\begin{aligned} V_r\Big|_{R_1} &= \frac{dR_1}{dt} = \frac{\partial R_1}{\partial t} + V_z\Big|_{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial z} = \frac{\partial (R-\delta)}{\partial t} + V_z\Big|_{R_1} \frac{\partial (R-\delta)}{\partial z} = \\ &= -\frac{\partial \delta}{\partial t} - V_z\Big|_{R_1} \frac{\partial \delta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) называется кинематическим условием на поверхности пленки.

Преобразуем уравнение движения (1.1). Сложим его с уравнением неразрывности (1.3), умноженным на V_z, а полученную сумму умножим на r:

$$\begin{aligned} & r\frac{\partial V_z}{\partial t} + r\frac{\partial V_z^2}{\partial z} + V_z \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + rV_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = \\ & = gr - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial z} r + \nu_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \nu_2 r \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Выполним осреднение слагаемых в уравнении (1.7) в поперечном сечении пленки при фиксированном значении времени по аналогии с вычислением средней скорости пленки:

$$\overline{V}_z = \frac{2}{R^2 - R_1^2} \int\limits_{R_1}^{R} V_z r \, dr, \tag{1.8}$$

при этом в качестве упрощения можно принять

$$R^2 - R_1^2 = (R - R_1)(R + R_1) \approx \delta(2R - (R - R_1)) = \delta(2R - \delta) \approx 2\delta R,$$

так как $\delta \ll 2R$. Таким образом, для произвольной функции

$$\int\limits_{R_1}^{R} f(z,t) r dr = f(z,t)\frac{r^2}{2} = f(z,t)\frac{R^2 - R_1^2}{2} \approx f(z,t)\delta R. \tag{1.9}$$

Проинтегрируем по толщине пленки уравнение (1.7), воспользовавшись правилом Лейбница [13]:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\psi_1(\alpha)}^{\psi_2(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx = \int_{\psi_1(\alpha)}^{\psi_2(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx + f[\psi_2(\alpha),\alpha] - f[\psi_1(\alpha),\alpha], \tag{1.10}$$

тогда интеграл от первого слагаемого уравнения (1.7) будет

$$\int\limits_{R_1}^{R} r\frac{\partial V_z}{\partial t}\, dr = \frac{d}{dt}\left(\delta R \overline{V}_z\right) - R_1 V_z(R_1)\frac{\partial \delta}{\partial t}\,.$$

Аналогично, интеграл от второго слагаемого (1.7)

$$\int\limits_{R_1}^{R} r\frac{\partial V_z^2}{\partial z}\, dr = \frac{d}{dz}\left(\delta R \overline{V_z^2}\right) - R_1 V_z^2(R_1)\frac{\partial \delta}{\partial z}\,. \tag{1.11}$$

Далее будем заменять полную производную по координате на частную.

Определим продольную скорость жидкости для свободно стекающей пленки (трение на границе раздела фаз равно нулю $\tau = 0$) в соответствии с [14]:

$$V_z(r) = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{4\mu_2}\left(R^2 - r^2 + 2R_1^2 \ln\frac{r}{R}\right)\,,$$

где μ — динамическая вязкость.

Вычислим среднюю скорость пленки и перепишем функцию скорости

$$\overline{V}_z = \frac{1}{R^2 - R_1^2}\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{8\mu_2}\left[R^4 - 4R^2R_1^2 + 3R_1^4 - 4R_1^4 \ln\frac{R_1}{R}\right]\,;$$

$$V_z(r) = \overline{V}_z \frac{2(R^2 - R_1^2)\left(R^2 - r^2 + 2R_1^2 \ln\frac{r}{R}\right)}{R^4 - 4R^2R_1^2 + 3R_1^4 - 4R_1^4 \ln\frac{R_1}{R}}\,.$$

Запишем производную от скорости и обозначим коэффициент при средней скорости через $K(\delta)$ (т. к. $R_1 = R - \delta$):

$$\left.\frac{\partial V_z}{\partial r}\right|_R = \overline{V}_z K(\delta)\,. \tag{1.12}$$

Можно показать, что для кольцевого режима течения отношение $\overline{V_z^2}/\overline{V}_z^{\,2} \simeq 1,2$. Таким образом, интеграл (1.11) преобразуется к виду

$$\int\limits_{R_1}^{R} r\frac{\partial V_z^2}{\partial z}\, dr = 1,2\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta R \overline{V}_z^{\,2}\right) - R_1 V_z^2(R_1)\frac{\partial \delta}{\partial z}\,.$$

Для вычисления интеграла от последнего слагаемого равенства (1.7) применим формулу Лейбница (1.10) к выражению:

$$\frac{d}{dz}\int\limits_{R_1}^{R}\frac{\partial V_z}{\partial z}\,\frac{dr^2}{2}=(R-\delta)\frac{\partial V_z}{\partial z}\bigg|_{r=R_1}\frac{\partial\delta}{\partial z}+\int\limits_{R_1}^{R}r\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\,dr. \tag{1.13}$$

С другой стороны, применим эту же формулу к интегралу $\dfrac{d}{dz}\displaystyle\int_{R_1}^{R}rV_z\,dr$ и выразим

$$\int\limits_{R_1}^{R}\frac{\partial V_z}{\partial z}\,\frac{dr^2}{2}=\frac{\partial}{\partial z}(\delta R\overline{V}_z)-V_z(R_1)(R-\delta)\frac{\partial\delta}{\partial z}\,. \tag{1.14}$$

Возьмем производную по z от последнего равенства и приравняем правые части (1.13) и (1.14), откуда найдем искомый интеграл

$$\int\limits_{R_1}^{R}r\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\,dr=-(R-\delta)\frac{\partial V_z}{\partial z}\bigg|_{r=R_1}\frac{\partial\delta}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\delta R\overline{V}_z)-\frac{\partial V_z(R_1)}{\partial z}(R-\delta)\frac{\partial\delta}{\partial z}+$$

$$+V_z(R_1)\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)^2-V_z(R_1)(R-\delta)\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}\,.$$

Остальные слагаемые интегрируются аналогично.

Таким образом, после осреднения слагаемых уравнение движения (1.7) с учетом капиллярного давления перепишется в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\delta R\overline{V}_z\right)-R_1V_z(R_1)\frac{\partial\delta}{\partial t}+1.2\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta R\overline{V}_z^{\,2}\right)-R_1V_z^2(R_1)\frac{\partial\delta}{\partial z}-\\&-R_1(V_rV_z)\Big|_{R_1}=gR\delta-\frac{1}{\rho_2}\left[\rho_1 g-\sigma\left(\frac{\partial^3\delta}{\partial z^3}+\frac{1}{(R-\delta)^2}\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)\right]R\delta+\\&+\nu_2R\frac{\partial V_z}{\partial r}\bigg|_R+\nu_2\left[-(R-\delta)\frac{\partial V_z}{\partial z}\bigg|_{r=R_1}\frac{\partial\delta}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\delta R\overline{V}_z\right)-\right.\\&\left.-\frac{\partial V_z(R_1)}{\partial z}(R-\delta)\frac{\partial\delta}{\partial z}+V_z(R_1)\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)^2-V_z(R_1)(R-\delta)\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}\right].\end{aligned} \tag{1.15}$$

Умножим условие (1.6) на $R_1V_z(R_1)$ и подставим результат в (1.15). Тогда с учетом замены (1.12) получаем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\delta R\overline{V}_z\right)+1.2\frac{d}{dz}(\delta R\overline{V}_z^{\,2})=g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\delta R+\\&+\frac{\sigma}{\rho_2}\left(\frac{\partial^3\delta}{\partial z^3}+\frac{1}{(R-\delta)^2}\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)\delta R+\nu_2R\overline{V}_zK(\delta)-\\&-\nu_2\,(R-\delta)\frac{\partial V_z}{\partial z}\bigg|_{r=R_1}\frac{\partial\delta}{\partial z}+\nu_2\frac{d^2}{dz^2}\left(\delta R\overline{V}_z\right)-\nu_2\frac{\partial V_z(R_1)}{\partial z}(R-\delta)\frac{\partial\delta}{\partial z}\;+\\&+\nu_2V_z(R_1)\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)^2-\nu_2V_z(R_1)(R-\delta)\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}\,.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Аналогично преобразуем уравнение неразрывности (1.2): умножим на r и проинтегрируем отдельно слагаемые. В результате получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta R\overline{V}_z\right) + R_1\frac{\partial\delta}{\partial t} = 0. \tag{1.17}$$

В системе (1.16)—(1.17) можно заменить полную производную по времени на частную, пренебрегая зависимостью расхода пленки от продольной координаты z. Для этого оценим вклад конвективной составляющей в полную производную:

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\overline{V}_z\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta\overline{V}_z\right) + \overline{V}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta\overline{V}_z\right);$$

введем безразмерные величины

$$\widehat{V}_z = \frac{\overline{V}_z}{V_0}, \qquad \widehat{\delta} = \frac{\delta}{\delta_0}, \qquad \widehat{z} = \frac{z}{L}, \qquad \widehat{t} = \frac{t}{T},$$

где δ_0, V_0 — средние по времени толщина и скорость пленки, L — длина канала, T — период поверхностной волны. Тогда частная и конвективная составляющие производной будут соответствовать следующим безразмерным комплексам:

$$\frac{\delta_0 V_0}{T}, \qquad \frac{\delta_0 V_0^2}{L}.$$

Действительно, конвективный член мал по сравнению с частной производной при условии

$$T \ll \frac{L}{V_0}.$$

Для тонких пленок это с очевидностью выполняется.

Объединим уравнения движения (1.16) и неразрывности (1.17), для чего возьмем частную производную от уравнения движения по z и от уравнения неразрывности по t, а затем выразим все слагаемые уравнения движения с использованием уравнения неразрывности. Окончательно получим равенство:

$$\begin{aligned}
&(R-\delta)\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 - (R-\delta)\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 1.2\left(-2\overline{V}_z(R-\delta)\frac{\partial\overline{V}_z}{\partial z}\frac{\partial\delta}{\partial t} + \right.\\
&\left. +2\overline{V}_z R\frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial\delta}{\partial t} - 2\overline{V}_z(R-\delta)\frac{\partial^2\delta}{\partial z\partial t} - 2R\overline{V}_z\frac{\partial\overline{V}_z}{\partial z}\frac{\partial\delta}{\partial z} - \overline{V}_z^{\,2}R\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}\right) =\\
&= g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)R\frac{\partial\delta}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho_2}R\left[\frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial^3\delta}{\partial z^3} + \delta\frac{\partial^4\delta}{\partial z^4} - \frac{R+\delta}{(R-\delta)^3}\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)^2 + \right.\\
&\left. +\frac{\delta}{(R-\delta)^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}\right] + \nu_2 RK(\delta)\left(-\frac{\overline{V}_z}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial z} - \frac{R-\delta}{\delta R}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right) +\\
&+\nu_2 R\overline{V}_z\frac{\partial K(\delta)}{\partial\delta}\frac{\partial\delta}{\partial z} + \left.\frac{\partial V_z}{\partial z}\right|_{r=R_1}\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)^2 - (R-\delta)\left.\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right|_{r=R_1}\frac{\partial\delta}{\partial z} + \\
&+\nu_2\left[-(R-\delta)\left.\frac{\partial V_z}{\partial z}\right|_{r=R_1}\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}\frac{\partial\delta}{\partial t} + 2\frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial^2\delta}{\partial z\partial t} - (R-\delta)\frac{\partial^3\delta}{\partial z^2\partial t} - \right.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$-\frac{\partial^2 V_z(R_1)}{\partial z^2}(R-\delta)\frac{\partial\delta}{\partial z} + \frac{\partial V_z(R_1)}{\partial z}\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial V_z(R_1)}{\partial z}(R-\delta)\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2} +$$

$$+\frac{\partial V_z(R_1)}{\partial z}\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)^2 + 2V_z(R_1)\frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2} - \frac{\partial V_z(R_1)}{\partial z}(R-\delta)\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2} +$$

$$+V_z(R_1)\frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2} - V_z(R_1)(R-\delta)\frac{\partial^3\delta}{\partial z^3}\Bigg] .$$

Представим толщину пленки и ее скорость в виде суммы средней по времени величины и возмущения:

$$V_z = V_0 + V', \qquad \delta = \delta_0 + \delta' \tag{1.19}$$

и выполним линеаризацию (1.18), оставляя только величины нулевого и первого порядков малости. Заметим, что во всех слагаемых будут присутствовать производные скорости и толщины пленки. Следовательно, в знаменателях должны стоять только регулярные величины. Это легко доказать последовательным умножением на общий знаменатель, выделением слагаемых первого порядка малости и обратным делением. Окончательно получаем:

$$\frac{\sigma}{\rho_2}\,\delta_0 R\frac{\partial^4\delta'}{\partial z^4} + \frac{\partial^2\delta'}{\partial z^2}\left(\frac{\sigma}{\rho_2}\frac{\delta_0 R}{(R-\delta_0)^2} + 1.2RV_0^2\right) + \frac{\partial^2\delta'}{\partial z\partial t}\,2.4\,V_0(R-\delta_0) +$$

$$+(R-\delta_0)\frac{\partial^2\delta'}{\partial t^2} + \frac{\partial\delta'}{\partial z}\left[g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)R + \nu_2 RV_0\frac{\partial K(\delta)}{\partial\delta}\bigg|_{\delta=\delta_0} -\right.$$

$$\left. -\,\nu_2 RK(\delta_0)\frac{V_0}{\delta_0}\right] - \nu_2 RK(\delta_0)\frac{R-\delta_0}{\delta_0 R}\frac{\partial\delta'}{\partial t} - \nu_2(R-\delta_0)\frac{\partial^3\delta'}{\partial z^2\partial t} + \tag{1.20}$$

$$+\,\nu_2(R-\delta_0)V_z(r)\Big|_{r=R-\delta_0}\frac{\partial^3\delta'}{\partial z^3} = 0\,.$$

Равенство (1.20) представляет собой *уравнение волновой пленки на цилиндрической поверхности.*

2. Определение частоты возмущения и волнового числа

Представим форму поверхности раздела в виде прогрессивной (бегущей) волны

$$\delta' = Ae^{i(kz-\omega t)},$$

где A — амплитуда волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, ω — частота возмущения поверхности раздела.

Вычислим производные, входящие в уравнение пленки:

$$\frac{\partial\delta'}{\partial z} = Aike^{i(kz-\omega t)}\,,\ \frac{\partial^2\delta'}{\partial z^2} = -Ak^2e^{i(kz-\omega t)}\,,\ \frac{\partial^3\delta'}{\partial z^3} = -Aik^3e^{i(kz-\omega t)}\,,$$
$$\frac{\partial^4\delta'}{\partial z^4} = Ak^4e^{i(kz-\omega t)}\,,\ \frac{\partial\delta'}{\partial t} = -Ai\omega e^{i(kz-\omega t)}\,,\ \frac{\partial^2\delta'}{\partial t^2} = -A\omega^2e^{i(kz-\omega t)}\,, \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial^2\delta'}{\partial z\partial t} = Ak\omega e^{i(kz-\omega t)}\,,\ \frac{\partial^3\delta'}{\partial z^2\partial t} = Aik^2\omega e^{i(kz-\omega t)}\,.$$

Подставим в уравнение волновой пленки (1.20) представления (2.1). Получаем дисперсионное соотношение, связывающее волновое число и частоту колебаний границы раздела. Нейтральные, то есть незатухающие и невозрастающие, колебания поверхности пленки возможны только при равенстве нулю мнимой части уравнения волновой пленки. Выделим мнимую часть

$$k\left[g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)R + \nu_2RV_0\frac{\partial K(\delta)}{\partial\delta}\bigg|_{\delta=\delta_0} - \nu_2RK(\delta_0)\frac{V_0}{\delta_0}\right] +$$
$$+\omega\nu_2RK(\delta_0)\frac{R-\delta_0}{\delta_0R} - \nu_2k^2\omega(R-\delta_0) + \nu_2k^3(R-\delta_0)V_z\Big|_{R-\delta_0} = 0 \tag{2.2}$$

и действительную

$$\frac{\sigma}{\rho_2}\,\delta_0Rk^4 - k^2\left(\frac{\sigma}{\rho_2}\frac{\delta_0R}{(R-\delta_0)^2} + 1.2RV_0^2\right) + 2.4\,k\omega V_0(R-\delta_0) -$$
$$-\omega^2(R-\delta_0) = 0\,. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2), (2.3) позволяют определить параметры волновой пленки ω и k при известных значениях скорости и толщины V_0 и δ_0. Если не учитывать вторую производную продольной скорости в уравнении движения, последние два слагаемых в равенстве (2.2) будут отсутствовать. Кроме того, фазовая скорость поверхностной волны определяется соотношением $c = \omega/k$. Отношение фазовой скорости волны к средней скорости пленки обозначим через Θ:

$$\Theta = \frac{c}{V_0}.$$

3. Амплитуда волны

Амплитуда капиллярной волны A не может быть определена в линейной постановке. Ее определяют из условия минимума диссипации энергии [3]. Для рассматриваемого режима течения диссипация энергии будет происходить только за счет вязкостных сил. Согласно известной гидродинамической формуле [15]

$$\frac{dE}{dt} = -\mu_2\int\limits_{R_1}^{R}\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2dr =$$

$$= -\frac{16}{3}\mu_2 \overline{V}_z^{\,2} \frac{(R^2 - R_1^2)^2 (R^4 - 3R_1^4 - 6R^2R_1^2 + 8RR_1^3)}{R\left(R^4 - 4R^2R_1^2 + 3R_1^4 - 4R_1^4 \ln\dfrac{R_1}{R}\right)^2} ,$$

где E — кинетическая энергия.

Данное выражение можно заменить приближенным равенством с относительной погрешностью не более 2 % при $\delta/R < 0,05$

$$\frac{dE}{dt} \approx -\mu_2 \overline{V}_z^{\,2} \frac{2,987}{\delta} . \tag{3.1}$$

Для волновой пленки любой параметр является функцией от $\xi = z - ct$. Тогда для произвольной функции $f = f(\xi)$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial \xi} = -c\frac{\partial f}{\partial z},$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} .$$

Выполним преобразования с уравнением неразрывности (1.17). С одной стороны, как показано выше,

$$\frac{d}{dz}(\delta R \overline{V}_z) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\delta R \overline{V}_z),$$

с другой — из уравнения неразрывности (1.17)

$$\frac{d}{dz}(\delta R \overline{V}_z) = -R_1 \frac{\partial \delta}{\partial t},$$

приравняем правые части полученных равенств и разделим на $(-R)$:

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\delta \overline{V}_z) = \frac{R-\delta}{R}\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{1}{2R}\frac{\partial (R-\delta)^2}{\partial t} .$$

Проинтегрируем последнее равенство по промежутку времени от $t = 0$, $\delta = \delta_0$ до некоторого промежуточного значения t для фиксированного значения координаты z:

$$\frac{1}{c}\int\limits_{\delta_0 V_0}^{\delta \overline{V}_z} d(\delta \overline{V}_z) = -\frac{1}{2R}\int\limits_{\delta_0}^{\delta} d(R-\delta)^2 .$$

После интегрирования с учетом $\delta \ll 2R$ получаем выражение для средней скорости

$$\overline{V}_z = c + \frac{\delta_0(V_0 - c)}{\delta} = \Theta V_0 + \frac{\delta_0(V_0 - \Theta V_0)}{\delta} = \frac{V_0(\Theta\delta - (\Theta - 1)\delta_0)}{\delta} .$$

С учетом представления (1.19)

$$\overline{V}_z = \frac{V_0(\delta_0 + \Theta\delta')}{\delta_0 + \delta'} , \tag{3.2}$$

а радиус пленки

$$R_1 = R - \delta_0 - \delta' = R - \delta_0 - A\sin(kz - \omega t)\,. \tag{3.3}$$

Средняя диссипация энергии на единицу длины будет равна

$$\left(\overline{\frac{dE}{dt}}\right)_\lambda = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda \frac{dE}{dt}\,dz\,. \tag{3.4}$$

Из определения волнового числа следует

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi\Theta V_0}{\omega}\,.$$

Подставим в (3.4) представления (3.1) и (3.2):

$$\left(\overline{\frac{dE}{dt}}\right)_\lambda = -\frac{2.987}{\lambda}\,\mu_2 V_0^2 \int_0^\lambda \frac{(\delta_0 + \Theta\delta')^2}{(\delta_0 + \delta')^3}\,dz.$$

Обозначим отношение δ'/δ_0 через ζ. Тогда

$$\left(\overline{\frac{dE}{dt}}\right)_\lambda = -\frac{2.987}{\lambda}\frac{\mu_2 V_0^2}{\delta_0}\int_0^\lambda \frac{(1+\Theta\zeta)^2}{(1+\zeta)^3}\,dz. \tag{3.5}$$

Массовый расход жидкости на единице ширины пленки

$$G_2' = \rho_2 V_0 \delta_0. \tag{3.6}$$

Преобразуем равенство (3.5)

$$\left(\overline{\frac{dE}{dt}}\right)_\lambda = -\frac{2.987\nu_2 {G_2'}^2}{\delta_0^3\rho_2}\,\Phi, \tag{3.7}$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{(1+\Theta\zeta)^2}{(1+\zeta)^3}\,dz. \tag{3.8}$$

Функция ζ зависит от z и t.

Если $\zeta = 0$, то есть при отсутствии волнового течения, $\Phi = 1$, и диссипация будет совпадать с диссипацией при ламинарном течении гладкой пленки. Иначе интеграл $\Phi < 1$. Диссипированная энергия покрывается только за счет работы объемных сил, то есть

$$\overline{L} = \left(\overline{\frac{dE}{dt}}\right)_\lambda. \tag{3.9}$$

С другой стороны, эта работа на единицу длины канала

$$\overline{L} = gG_2'. \tag{3.10}$$

Приравнивая (3.9) и (3.10), получаем:

$$\delta_0^3 = \frac{2.987\nu_2 G_2'}{g\rho_2}\,\Phi\,. \tag{3.11}$$

Условием минимума диссипации будет

$$\frac{d}{dA}\left(\overline{\frac{dE}{dt}}\right)_{\lambda} = 0\,.$$

Последнее условие означает экстремум функции Φ:

$$\frac{d\Phi}{dA} = 0\,. \tag{3.12}$$

4. Решение по предложенной модели

Математическая модель по определению основных параметров волновой пленки δ_0, V_0, k, ω и A включает систему пяти уравнений (2.2), (2.3), (3.6), (3.11), (3.12). Результаты численных расчетов по предложенной модели для водяной пленки, стекающей по стенке вертикального цилиндрического канала радиуса $R = 10$ мм при температуре $T = 20°C$, представлены в табл. 4.1, где число Рейнольдса $Re_2 = G_2'/\mu_2$. В научной литературе иногда используется безразмерное волновое число [1]:

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\,\delta_0.$$

Малые числа $k_1 < 1$ соответствуют длинным волнам на пленке.

Таблица 4.1

Расчетные характеристики волновой пленки с учетом слагаемого $\partial^2 V_z/\partial z^2$

№	G_2', кг/(с · м^2)	δ_0, мм	V_0, м/с	Re_2	k, 1/мм	ω 1/с	λ, мм	c, м/с	c/V_0
1	0,006	0,118	0,051	5,882	0,886	130,57	7,091	0,147	2,899
2	0,010	0,140	0,071	9,804	1,140	236,17	5,511	0,207	2,899
3	0,015	0,161	0,094	14,71	1,389	376,45	4,522	0,271	2,895
4	0,020	0,177	0,113	19,61	1,594	521,62	3,942	0,327	2,887
5	0,025	0,190	0,132	24,51	1,768	668,93	3,553	0,378	2,876

№	λ/δ_0	A/δ_0	k_1	Φ	A, мм
1	0,043	59,98	0,363	0,104	0,882
2	0,051	39,46	0,363	0,159	0,882
3	0,058	28,17	0,363	0,223	0,881
4	0,064	22,30	0,365	0,282	0,880
5	0,070	18,66	0,366	0,377	0,879

Как видно из таблицы, средняя скорость пленки V_0 возрастает с увеличением расхода в ней. Число Re_2 увеличивается, поверхность пленки покрывается волнами большей частоты ω и амплитуды A. Следовательно,

увеличивается и средняя толщина пленки δ_0. Как было сказано выше, интеграл Φ, при чисто ламинарном режиме принимавший свое максимальное значение $\Phi = 1$, уменьшается. Вместе с тем возрастают частота возмущений поверхности и фазовая скорость волны c. Длина волны λ уменьшается, что приводит к увеличению волнового числа k. Фазовая скорость волны примерно в 3 раза превышает среднюю скорость пленки, что соответствует нейтральным волнам [1, 3, 16].

Часто в гидродинамике пренебрегают слагаемым $\partial^2 V_z/\partial z^2$ в уравнении движения. Чтобы оценить его вклад, будем рассматривать уравнение волновой пленки без учета второй производной скорости. Искомым уравнением будет являться (1.20) без последних двух слагаемых (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Расчетные характеристики волновой пленки без учета слагаемого $\partial^2 V_z/\partial z^2$

№	G_2', кг/(с · м^2)	δ_0, мм	V_0, м/с	Re_2	k, 1/мм	ω 1/с	λ, мм	c, м/с	A, мм
1	0,006	0,118	0,051	5,882	0,883	130,37	7,114	0,148	0,043
2	0,010	0,140	0,071	9,804	1,144	237,96	5,491	0,208	0,051
3	0,015	0,161	0,094	14,71	1,406	383,92	4,469	0,273	0,058
4	0,020	0,177	0,113	19,61	1,631	540,36	3,853	0,331	0,064
5	0,025	0,190	0,132	24,51	1,827	703,27	3,440	0,385	0,070

Сравнение показывает, что отбрасываниевторой производной $\partial^2 V_z/\partial z^2$ дает ошибку при вычислении ω примерно на 5 %.

Рис. 4.1 иллюстрирует зависимость безразмерного трения от числа Рейнольдса Re_2 для течения волновой пленки по внешней стенке вертикального цилиндрического канала. Трение при стекании ламинарной пленки ($Re_2 < 300$) вычислялось по формуле [17]

$$\tau_w = \frac{4}{Re_2}\frac{\rho_2 V_0^2}{2}, \tag{4.1}$$

для турбулентной пленки — по приведенной формуле Блазиуса [17]

$$\tau_w = \frac{0,0559}{\sqrt[4]{Re_2}}\frac{\rho_2 V_0^2}{2}. \tag{4.2}$$

Расчетные данные сравниваются с экспериментом [18, 19] по стеканию водяной пленки по внешней стенке вертикального цилиндрического канала наружным диаметром $D = 60$ мм. Расчет по предложенной модели проводился для $T = 20\,^\circ C$. Расхождение с экспериментальными данными составляет не более 10 %. Следовательно, данную математическую модель можно применять для практического использования.

На рис. 4.2 представлена зависимость безразмерной длины волны от числа Рейнольдса Re_2.

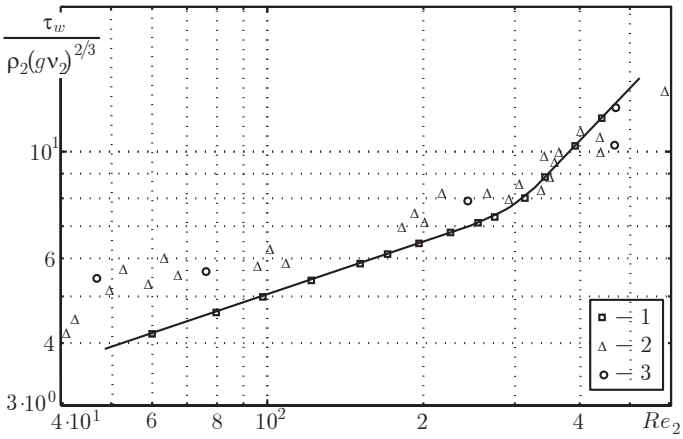

Рис. 4.1. Касательные напряжения на вертикальной цилиндрической стенке при стекании пленки воды: *1* — расчет по предложенной модели, сплошные линии — аппроксимация расчетных значений; *2, 3* — эксперименты [18, 19]

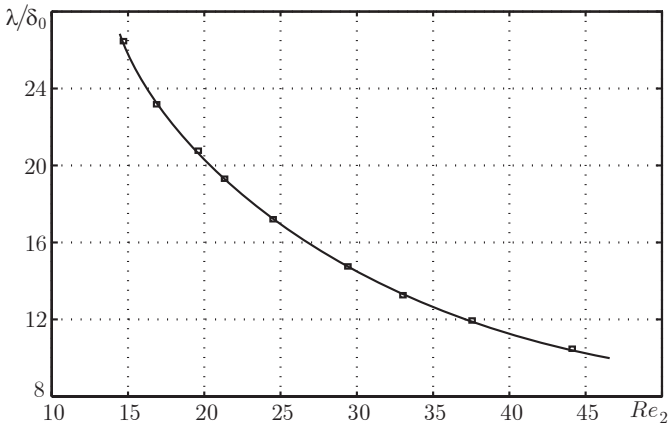

Рис. 4.2. Зависимость безразмерной длины волны от числа Рейнольдса: точки — расчетные значения, сплошная линия — аппроксимация расчетных значений

С возрастанием числа Re_2 длина волны уменьшается по отношению к толщине пленки. Это означает, что существует критическое число Рейнольдса, при котором длинноволновое допущение, сделанное в данной работе, будет неприемлемо. Точное определение этой границы может быть выделено в отдельную задачу. Однако с допустимой точностью из физических соображений можно утверждать, что при различии толщины пленки и длины волны на порядок построенная модель остается применимой.

Заключение

Построена замкнутая система уравнений, позволяющая определить характеристики поверхностной волны для пленки, стекающей по стенке верти-

кального цилиндрического канала. Расчет по модели проводился численно. Результаты расчетов хорошо коррелируют с известными экспериментальными данными, что позволяет говорить об адекватности модели.

Литература

[1] Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.

[2] Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Влияние волн на процессы переноса. Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. С. 191—207.

[3] Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости: в 3 ч. Ч. 1 Свободное течение // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948. Т. 18. Вып. 1. С. 1—28.

[4] Капица П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости: в 3 ч. Ч. III. Опытное изучение волнового режима течения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1949. Т. 19. Вып. 2. С. 105—120.

[5] Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем М.: Энергия, 1976. 295 с.

[6] Цвелодуб О.Ю. Волновые режимы на пленке обобщенной ньютоновской жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Известия РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 3—15.

[7] Демехин Е.А., Калайдин Е.Н., Растатурин А.А. Влияние волновых режимов на массообмен // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12. № 2. С. 259—269.

[8] Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43—51.

[9] Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2. С. 20—25.

[10] Лойцанский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 479 с.

[11] Патрашев А.Н. Гидромеханика. М., 1953. 719 с.

[12] Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. Т. 2. Движение жидкостей с трением и технические приложения. М.; Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935. 283 с.

[13] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М.: Физматлит, 2007. Т. 1. 680 с.

[14] Клюев Н.И., Соловьева Е.А. Квазигомогенная модель дисперсно-пленочного течения двухфазной смеси // Известия вузов. Авиационная техника. 2005. № 4. С. 35—38.

[15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: ГТТИ, 1944. 325 с.

[16] Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.

[17] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред М.: Наука, 1987. Ч. 1. 484 с.

[18] Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев В.Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке // Журнал прикладной механики и технической физики. 1979. № 6. С. 77—87.

[19] Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев В.Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Новосибирск, 1979. 51 с. Препринт АН СССР, Сибирское отделение. Институт теплофизики. № 36—79.

Поступила в редакцию 13/*III*/2009;
в окончательном варианте — 13/*III*/2009.

WAVE FILM FLOW ON THE WALL OF THE VERTICAL CYLINDRICAL CHANNEL

© 2009 N.I. Kluev, E.A. Solovieva[2]

This paper presents a mathematical model of a wave film flowing downward on the wall of the vertical cylindrical channel by gravity. The investigation was carried out under a long-wave approximation.

Key words and phrases: circular regime, wave film, vertical cylyndrical channel, long-wave approximation.

Paper received 13/*III*/2009.
Paper accepted 13/*III*/2009.

[2]Kluev Nicolai Iliich (mmm-mechmat@ssu.samara.ru), Solovieva Evgeniya Alexandrovna (e.solovieva-ssu@mail.ru), Dept. of Mathematical Modelling of Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.